ÁLGEBRA II (61.08 – 81.02)

Evaluación Integradora | Primer cuatrimestre – 2020
Duración: 90 minutos. | 9/IX/20 – 13:00 hs.

Apellido y Nombres:

Padrón:

1. En $\mathbb{R}^3$ se considera el producto interno definido por

$$\langle x, y\rangle = y^T \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} x.$$

Hallar la matriz con respecto a la base canónica de la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre el menor subespacio que contiene a los subespacios

$$\mathbb{S}_1 = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T\right\} \ \text{ y } \ \mathbb{S}_2 = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - 4x_3 = 0,\, x_1 - x_2 = 0\right\}.$$

2. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz simétrica tal que $Y_1(t) = e^{2t}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T, Y_2(t) = e^{-t}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$ son soluciones del sistema $Y' = AY$ y tal que $\det(A) = 8$. Hallar todos los $Y_0 \in \mathbb{R}^3$ tales que la solución del problema de valores iniciales $Y' = AY$, $Y(0) = Y_0$ tiene norma acotada cuando $t \to +\infty$.

3. Sea $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ la matriz que satisface las siguientes propiedades:

$$\text{col}(A) = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T\right\}, \ \text{nul}(A) = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T\right\}, \ a_{11} > 0, \ \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sqrt{48},$$

y sea $b = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T$. Determinar la solución por cuadrados mínimos de norma mínima de la ecuación $Ax = b$.

4. En $\mathbb{R}^2$ con el producto interno canónico se considera, $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, la matriz con respecto a la base canónica de la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^2$ sobre el subespacio $\mathbb{S} = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : 2x_1 + x_2 = 0\right\}$. Hallar el máximo y el mínimo del conjunto

$$\left\{\|Ax\|^2 : x^T \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 9 \end{bmatrix} x = 1\right\}$$

y los vectores que los realizan.

ALGEBRA II - INTEGRADOR 09-09-2020

Resolución esquemática - D. Prélat

---

1) El producto interno a considerar está dado por

$$< x,y > = y^T \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} x = 3x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 \ . \qquad (1.1)$$

Ahora, el menor subespacio que contiene a los subespacios $S_1 = gen\left\{ \overbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}^{u} \right\}$ y

$S_2 = \left\{ x \in \Re^3 : x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 = x_1 - x_2 \right\} = gen\left\{ \overbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}^{v} \right\}$ es el plano $S_1 + S_2 = gen\{u,v\}$ (en este caso, la suma es directa pues u y v son l.i.). Para encontrar la proyección ortogonal sobre este plano podemos encontrar primero una base ortogonal del mismo:

$$w_1 = u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$w'_2 = -\frac{< v,w_1 >}{\|w_1\|^2} w_1 + v = -\frac{< v,u >}{< u,u >} u + v =$$

$$= -\frac{3.2.1 + 2.1 + 2.1 + 2.2.1 + 2.1.1}{3.1.1 + 1.1 + 1.1 + 2.1.1 + 2.1.1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{16}{9} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} \\ -\frac{7}{9} \end{bmatrix}$$

Por comodidad, vamos a elegir $w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $w_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix}$ como base ortogonal de $S_1 + S_2 = gen\{u,v\}$. Verificación:

(a) Que $w_1 = u$ es combinación lineal de u y v es trivial. Ahora, respecto del segundo vector: $w_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix} = -16 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 9 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = -16u + 9v$.

(b) $< w_1, w_2 > = 3.1.2 + 1.2 + 1.2 + 2.1.2 - 2.1.7 = 0$

Correcto: $\left\{ \overbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}^{w_1}, \overbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix}}^{w_2} \right\}$ es base ortogonal de $S_1 + S_2 = gen\{u, v\}$. Entonces, para cada $x \in \Re^3$, su proyección ortogonal sobre $S_1 + S_2 = gen\{u, v\}$ es:

$$Px = \frac{< x, w_1 >}{\|w_1\|^2} w_1 + \frac{< x, w_2 >}{\|w_2\|^2} w_2 = \frac{3x_1.1 + x_1.1 + x_2.1 + 2x_2.1 + 2x_3.1}{3.1.1 + 1.1 + 1.1 + 2.1.1 + 2.1.1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{3x_1.2 + x_1.2 + x_2.2 + 2x_2.2 - 2x_3.7}{3.2.2 + 2.2 + 2.2 + 2.2.2 + 2.(-7)(-7)} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix} = \frac{4x_1 + 3x_2 + 2x_3}{9} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{8x_1 + 6x_2 - 14x_3}{126} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (\frac{4}{9} + \frac{16}{126})x_1 + (\frac{3}{9} + \frac{12}{126})x_2 + (\frac{2}{9} - \frac{28}{126})x_3 \\ (\frac{4}{9} + \frac{16}{126})x_1 + (\frac{3}{9} + \frac{12}{126})x_2 + (\frac{2}{9} - \frac{28}{126})x_3 \\ (\frac{4}{9} - \frac{56}{126})x_1 + (\frac{3}{9} - \frac{42}{126})x_2 + (\frac{2}{9} + \frac{98}{126})x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{7} & \frac{3}{7} & 0 \\ \frac{4}{7} & \frac{3}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Es decir: la matriz buscada es $P = \begin{bmatrix} \frac{4}{7} & \frac{3}{7} & 0 \\ \frac{4}{7} & \frac{3}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Comprobaciones:

$$Pu = \begin{bmatrix} \frac{4}{7} & \frac{3}{7} & 0 \\ \frac{4}{7} & \frac{3}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Pv = \begin{bmatrix} \frac{4}{7} & \frac{3}{7} & 0 \\ \frac{4}{7} & \frac{3}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Pw = \begin{bmatrix} \frac{4}{7} & \frac{3}{7} & 0 \\ \frac{4}{7} & \frac{3}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde el vector $w = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ es ortogonal a u y a v:

$$< u, w > = 3.1.(-3) + 1.4 + 1.(-3) + 2.1.4 = 0$$
$$< v, w > = 3.2.(-3) + 2.4 + 2.(-3) + 2.2.4 = 0$$

De estas comprobaciones se deduce, además, que $P^2 = P$, igualdad que también se puede comprobar directamente sin mayores dificultades.

---

2) Del enunciado se desprende que $A\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$ y $A\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$. Por ser A real y simétrica, $A\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$ para algún autovalor real λ (observe que los tres vectores involucrados son ortogonales entre sí). Dado que el determinante de A es 8 (por hipótesis), resulta que $\lambda=-4$. Por lo tanto, la solución general del sistema es

$$Y(t)=c_1e^{2t}\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}+c_2e^{-t}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}+c_3e^{-4t}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$$

Las soluciones acotadas corresponden a $c_1=0$, es decir:

$$Y(t)=c_2e^{-t}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}+c_3e^{-4t}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$$

y las condiciones iniciales correspondientes son

$$Y(0)=c_2\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}\quad ,\quad c_1,c_2\in\Re$$

---

3) Con los datos del enunciado, una descomposición en valores singulares (reducida) de A es (y además obtenemos la matriz):

$$A=\overbrace{\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}}^{U_r}\overbrace{\begin{bmatrix}\sqrt{48}\end{bmatrix}}^{\Sigma_r}\overbrace{\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}}^{V_r^T}=\overbrace{\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}}^{U_r}\overbrace{\begin{bmatrix}4\sqrt{3}\end{bmatrix}}^{\Sigma_r}\overbrace{\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}}^{V_r^T}=\begin{bmatrix}\frac{4}{\sqrt{2}}\\\frac{8}{\sqrt{2}}\\\frac{4}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -2\\4 & -4\\2 & -2\end{bmatrix}$$

Que esta matriz verifica las condiciones $Col(A)=gen\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}\right\}$, $Nul(A)=gen\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\}$ y $a_{11}>0$ es obvio. Ahora, la condición $Max\{\|Ax\|:\|x\|=1\}=\sqrt{48}$, equivale obviamente a la igualdad $Max\left\{ \overbrace{x^T A^T Ax}^{\|Ax\|^2} : \|x\| = 1 \right\} = 48$, lo que equivale a que el mayor autovalor de $A^T A$ es 48 (el otro es nulo, pues el rango de $A^T A$ es igual al rango de A, que es 1). Por lo tanto, el único valor singular (no nulo) de A es $\sqrt{48}$. Si a usted no lo convence este razonamiento, puede hacer la cuentita y calcular los autovalores de la matriz $A^T A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -2 & -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & -24 \\ -24 & 24 \end{bmatrix}$. Apuesto que son 0 y 48.

Ahora, con la DVS podemos obtener la pseudo-inversa de Moore-Penrose:

$$A^+ = \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}^{V_r} \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{4\sqrt{3}} \end{bmatrix}}^{\Sigma_r^+} \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}}^{U_r} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{4\sqrt{6}} \end{bmatrix} \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}}^{U_r} = \begin{bmatrix} \frac{1}{24} & \frac{2}{24} & \frac{1}{24} \\ -\frac{1}{24} & -\frac{2}{24} & -\frac{1}{24} \end{bmatrix}$$

Entonces, la solución de norma mínima de $Ax = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ por cuadrados mínimos es

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{24} & \frac{2}{24} & \frac{1}{24} \\ -\frac{1}{24} & -\frac{2}{24} & -\frac{1}{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

(obsérvese que esta solución pertenece al espacio fila de A, condición necesaria para que la solución sea la de norma mínima)

---

4) La matriz A de la proyección ortogonal (respecto del producto interno canónico) en $\Re^2$ sobre $S = \{ x \in \Re^2 : 2x_1 + x_2 = 0 \} = gen\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ es, referida a la base canónica, es $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$. Comprobación: $\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Por otra parte, la matriz $M = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 9 \end{bmatrix}$ verifica $\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 20 \end{bmatrix} = 10 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ y por otro lado $\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Por lo tanto, ambas matrices se diagonalizan simultáneamente mediante la base ortonormal $u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$: $Au_1 = u_1$, $Au_2 = 0_{\Re^2}$, $Mu_1 = 10u_1$ y $Mu_2 = 5u_2$. Por lo tanto, dado $x = y_1u_1 + y_2u_2$, se tiene

$$\|Ax\|^2 = y_1^2 \quad , \quad x^T Mx = 10y_1^2 + 5y_2^2$$

Por lo tanto, $x^T Mx = 1 \Leftrightarrow 10y_1^2 + 5y_2^2 = 1 \Leftrightarrow y_1^2 = \frac{1}{10} - \frac{1}{2}y_2^2$ y entonces

$$0 \le \|Ax\|^2 = y_1^2 = \frac{1}{10} - \frac{1}{2}y_2^2 \le \frac{1}{10}$$

Se puede concluir que

(a) $\min\left\{\|Ax\|^2 : x^T Mx = 1\right\} = 0$ y se alcanza cuando $y_1 = 0$, es decir, en los puntos $x = \frac{1}{\sqrt{5}}u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}$ y $x = -\frac{1}{\sqrt{5}}u_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}$.

(b) $\max\left\{\|Ax\|^2 : x^T Mx = 1\right\} = \frac{1}{10}$ y se alcanza cuando $y_2 = 0$, es decir, en los puntos $x = \frac{1}{\sqrt{10}}u_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5\sqrt{2}} \\ \frac{2}{5\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ y $x = -\frac{1}{\sqrt{10}}u_1 = -\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{5\sqrt{2}} \end{bmatrix}$
